PRZYKŁADOWE ZADANIA OTWARTE KONKURSOWE

Zadanie 1

Biuro Turystyczne „Raj” w przypadku rezygnacji z wycieczki nie zwraca pełnej kwoty.

a) Jeśli rezygnacja z wyjazdu następuje miesiąc przed terminem wyjazdu, to potrąca 132 zł, czyli 8% ceny wycieczki. Ile kosztuje wycieczka?
b) Jeśli rezygnacja z wyjazdu następuje na 2 tygodnie przed terminem wyjazdu, to potrącenie wynosi 297 zł. Jaki to procent ceny wycieczki?
c) Jeśli rezygnacja następuje na tydzień przed terminem wyjazdu, to potrąca 36% ceny wycieczki. Jaka to kwota?

Zadanie 2

Dwie sąsiednie szkoły średnie zorganizowały wspólnie zawody sportowe. W różnych konkurencjach wystartowało razem 180 uczniów, w tym 15% dziewcząt. Wśród zawodników pierwszej szkoły było 10% dziewcząt, a wśród zawodników drugiej szkoły − 25% dziewcząt. Oblicz, ilu uczniów z każdej ze szkół brało udział w zawodach.

Zadanie 3

Zapisz za pomocą wartości bezwzględnej nierówność, której rozwiązaniem jest zbiór:

a) $(-3;3)$,

b) $\left(-\infty; 2\frac{1}{2}\right\rangle \cup \langle 6;\infty)$.

Zadanie 4

Rodzina Brzezińskich przeznaczyła na tygodniowy wakacyjny wyjazd 6400 zł. Cenę wyjazdu, w zależności od czasu jego trwania oraz wieku dzieci w nim uczestniczących, przedstawiono w tabeli.

	Osoba dorosła		**Dziecko Wiek: 2–7 lat**		**Dziecko Wiek: 8–15 lat**	
Liczba dni	7	14	7	14	7	14
Cena w zł	1599	1899	1200	1200	1442	1599

Cena nie zawiera: obowiązkowego ubezpieczenia KL i NW oraz ubezpieczenia bagażu w kwocie **40 PLN** na 1 tydzień i **80 PLN** na 2 tygodnie od osoby.

Oblicz błąd względny popełniony przy planowaniu wydatków na wycieczkę, jeśli dzieci państwa Brzezińskich mają 7 i 11 lat.

Zadanie 5

Dane są zbiory: $A=\langle -\pi; 2\rangle$, $B=(-3;2)$, $C=N$, $D=\langle 0;\infty)$.

a) Wyznacz zbiory: $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\cap C$.

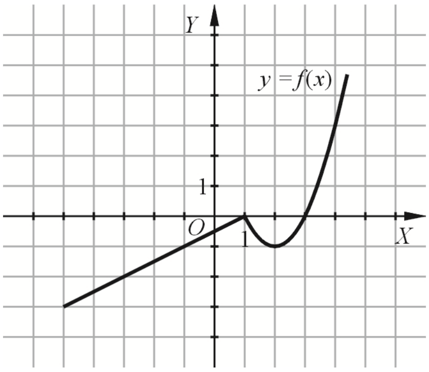
b) Zbiór $(A\cup B)\cap D$ zaznacz na osi liczbowej i zapisz w postaci przedziału. Podaj największą liczbę całkowitą należącą do tego zbioru.

Zadanie 6

Wyznacz wartość m tak, aby miejscem zerowym funkcji $f(x)=(m^2+1)x-5m$ była liczba 2.

Zadanie 7

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $y=f(x)$.

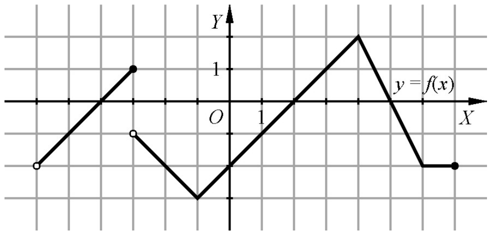


a) Odczytaj z wykresu przedziały monotoniczności funkcji f.
b) Dla jakich argumentów wartości funkcji spełniają warunek $0 \le f(x) \le 3$?

Zadanie 8

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji $y=f(x)$.
Odczytaj z niego:

a) dziedzinę i zbiór wartości funkcji,
b) jej miejsca zerowe,
c) przedziały monotoniczności funkcji,
d) liczbę rozwiązań równania $f(x)=m$
   w zależności od wartości parametru m.



Zadanie 9

Do pustego kartonu, który waży 1,5 kg, można włożyć 60 pudełek z herbatą. Każde pudełko z herbatą waży $0{,}12$ kg.

a) Napisz wzór opisujący ciężar kartonu jako funkcję liczby włożonych pudełek.
b) Ile pudełek należy włożyć do kartonu, aby karton z pudełkami ważył 4,5 kg?

Zadanie 10

Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x$.

a) Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji f.
b) Dla jakich argumentów wartości funkcji f są mniejsze od wartości funkcji g, jeśli $g(x)=2x-2$?

Zadanie 11

Dana jest funkcja: $f(x) = -2(x-1)^2 + 3$.

a) Narysuj jej wykres.

b) Podaj jej zbiór wartości oraz przedziały monotoniczności.

c) Wyznacz najmniejszą i największą wartość tej funkcji w przedziale $\left\langle 1\frac{1}{2}; 10 \right\rangle$.

Zadanie 12

Wyznacz wzór ogólny funkcji kwadratowej, której największą wartością jest 2, a miejscami zerowymi liczby –1 i 3.

Zadanie 13

Dla jakich wartości parametru *m* wykres funkcji $y = x^2 + 2mx + 3$ leży ponad osią OX?

Zadanie 14

Dany jest wielomian $w(x) = 2x \cdot p(x) - q(x)$, gdzie $p(x) = 3x^2 - x + 3$ i $q(x) = -3x^3 + x^2 + 6x - 6$.

a) Uporządkuj wielomian *w*.

b) Oblicz $w\left(-\frac{1}{3}\right)$ i $w\left(\sqrt{2}\right)$.

Zadanie 15

Po remoncie nawierzchni średnia prędkość samochodu jadącego z miejscowości A do B wzrosła o $15\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a czas przejazdu skrócił się o 40 minut. Oblicz, z jaką średnią prędkością jeżdżą teraz tą trasą samochody, jeśli miejscowości są oddalone od siebie o $200\ \text{km}$.

Zadanie 16

Spółdzielnia mieszkaniowa „Adrem” do ocieplenia bloku zatrudniła dwie brygady, które wykonały pracę w ciągu 12 dni. Gdyby każda brygada wykonywała pracę samodzielnie, to jedna z nich pracowałaby o 10 dni krócej niż druga. Jaką kwotę za wykonaną pracę powinna otrzymać każda z brygad tak, aby 24 000 zł, które zapłaciła spółdzielnia za wykonanie tej pracy zostały rozdzielone sprawiedliwie (proporcjonalnie do wkładu pracy)?

Zadanie 17

Grupa przyjaciół, aby zarobić na letni wyjazd, pracowała na plantacji truskawek przez czternaście dni. Plantator płacił za zebranie łubianki owoców 1,20 zł. Każdego dnia zbierano o 8 łubianek więcej niż poprzedniego dnia. Oblicz, ile łubianek truskawek zebrała grupa pierwszego dnia, a ile ostatniego, jeśli zarobek wyniósł 1864,80 zł.

Zadanie 18

Suma sześciu początkowych wyrazów rosnącego ciągu geometrycznego jest dziewięć razy większa od sumy jego trzech początkowych wyrazów. Jeśli do pierwszego i drugiego wyrazu tego ciągu dodamy 3, a trzeci wyraz pozostawimy bez zmiany, to otrzymane trzy liczby utworzą ciąg arytmetyczny. Wyznacz wzór ogólny ciągu geometrycznego.

Zadanie 19

Liczby $a_1,\ -\frac{3}{2},\ \frac{3}{4},\ a_4,\ a_5, ...$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego.

a) Oblicz jego iloraz oraz a_1 i a_5.

b) Oblicz sumę ośmiu początkowych wyrazów tego ciągu.

Zadanie 20

Wyznacz wzór ogólny ciągu arytmetycznego, wiedząc, że $a_7 = -2$ i $a_{13} = 2$.

Zadanie 21

Rozwiąż równanie: $-30 - 26 - 22 + ... + x = 264$.

Zadanie 22

Oblicz.

a) $\left[\left(\frac{4}{9}\right)^{-1,3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{5}}\right]^{\frac{1}{2}}$

b) $\frac{\log_3 24 - \log_3 8}{2\log_6 2 + \log_6 9}$

Zadanie 23

Zapisz w postaci potęgi liczby: $a = 5^8 \cdot \sqrt{5^4}$, $b = \frac{\left(5^3 \cdot 5^0\right)^2}{5^{-2}}$. Oblicz, ile razy liczba a jest większa od liczby b.

Zadanie 24

W trójkącie prostokątnym jedna przyprostokątna ma długość 5 cm, przeciwprostokątna zaś 7 cm. Znajdź wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego leżącego naprzeciwko dłuższej przyprostokątnej.

Zadanie 25

Wiedząc, że α jest kątem ostrym, doprowadź wyrażenie $\mathrm{ctg}^2\alpha \cdot \sin^2\alpha + \sin^2\alpha$ do najprostszej postaci.

Zadanie 26

W trapezie równoramiennym podstawy mają długości 20 cm i 8 cm, a sinus kąta ostrego jest równy $\frac{4}{5}$. Oblicz pole tego trapezu.

Zadanie 27

Powierzchnia pewnego mieszkania w skali 1 : 200 wynosi $16\ \mathrm{cm}^2$. Oblicz rzeczywistą powierzchnię mieszkania.

Zadanie 28

Oblicz długość wysokości CD trójkąta ABC, opuszczonej z wierzchołka kąta prostego, wiedząc, że przeciwprostokątna AB ma długość 12 cm, a wysokość CD dzieli ją w stosunku 1 : 3. Wykonaj rysunek pomocniczy.

Zadanie 29

Dany jest okrąg *O* o środku w punkcie $S(-2, 3)$ i promieniu $r = \sqrt{5}$.

a) Sprawdź, czy punkt $A(-1, 5)$ należy do okręgu *O*.

b) Napisz równanie okręgu, którego środkiem jest punkt $P(4, 0)$, stycznego zewnętrznie do okręgu *O*.

Zadanie 30

Pole trapezu równoramiennego opisanego na okręgu jest równe $72\sqrt{3}$. Oblicz długości podstaw tego trapezu, wiedząc, że jego ramię jest nachylone do podstawy pod kątem 60°.

Zadanie 31

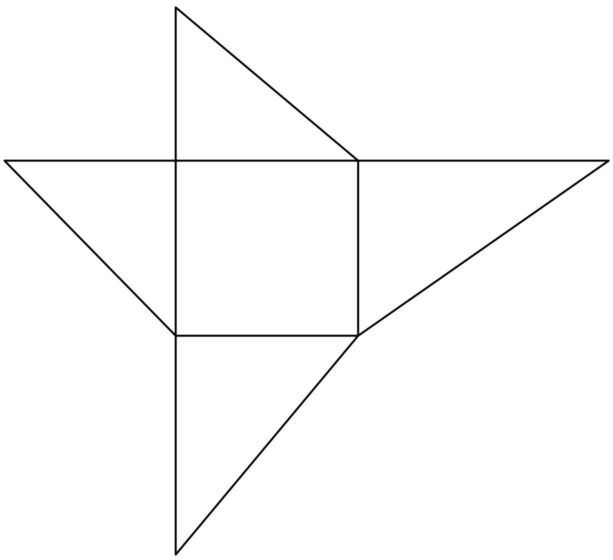
Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy 4 jest nachylona do ściany bocznej pod kątem 30°. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

Zadanie 32

Dana jest siatka ostrosłupa czworokątnego, którego podstawą jest kwadrat. Najdłuższa krawędź boczna tego ostrosłupa ma długość $4\sqrt{3}$, a jego wysokość jest równa długości podstawy. Oblicz:

a) objętość tego ostrosłupa,

b) pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.



Zadanie 33

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość 12, zaś krawędź boczna tworzy z wysokością ostrosłupa kąt o mierze $45°$. Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa.

Zadanie 34
Pole przekroju osiowego walca jest równe polu przekroju osiowego stożka.
Wiedząc, że promienie podstaw obu brył są równe, oblicz, ile razy objętość walca jest większa od objętości stożka.

Zadanie 35

Pole powierzchni bocznej stożka jest wycinkiem koła o promieniu 20 cm i kącie rozwarcia równym 120 stopni. Oblicz objętość tego stożka.

Zadanie 36

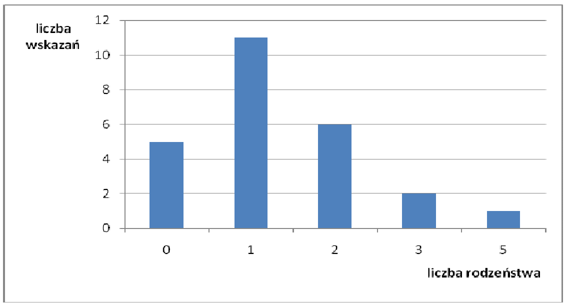
Ze zbioru $\{1, 2, 3, ..., 19\}$ losujemy kolejno dwie liczby bez zwracania.
Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:
a) A – wylosowane liczby są liczbami pierwszymi,
b) B – pierwsza z wylosowanych liczb jest liczbą parzystą, a druga – liczbą pierwszą.

Zadanie 37

Wzrost zawodników grających w siatkówkę wynosi w centymetrach: 200, 198, 197, 183, 187, 211, 195, 205, 189, 201, 205, 185, 205, 206.
a) Wyznacz dominantę i medianę wzrostu zawodników.
b) Oblicz średni wzrost zawodników $\overline{x}$. Wynik podaj z dokładnością do 1 cm.
c) Oblicz wariancję σ^2 i odchylenie standardowe σ wzrostu zawodników. Wyniki podaj z dokładnością do części setnych.

Zadanie 38

W klasie III b przeprowadzono ankietę, pytając uczniów o liczbę rodzeństwa. Wyniki tej ankiety przedstawiono na diagramie.



a) Wyznacz medianę i dominantę liczby rodzeństwa uczniów tej klasy.

b) Jaka jest średnia liczba dzieci przypadająca na jedną rodzinę ucznia klasy III b?

Zadanie 39

Janek obliczył, że jeśli ze sprawdzianu otrzyma ocenę bardzo dobrą, a z referatu celującą, to jego średnia ocen z matematyki wzrośnie z $3{,}7$ do 4. Oblicz, ile ocen z matematyki ma Janek.

Zadanie 40

Średnia arytmetyczna liczb: 10, $x^2 - y$, $3x + y$, 4, 8, -2 wynosi 5, a dominanta tych liczb jest równa 4. Oblicz x i y.