Zadania na dowodzenie dla zakresu podstawowego

1. (3 pkt) Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej m funkcja f dana wzorem $f(x) = (m^2+m+1)x+m$ jest rosnąca.

Rozwiązanie
Funkcja f jest funkcją liniową. Jej monotoniczność zależy od znaku współczynnika kierunkowego. We wzorze funkcji jest on równy m^2+m+1. Trójmian kwadratowy $y = m^2+m+1$ nie ma miejsc zerowych. Jego wykresem jest parabola o ramionach skierowanych do góry, zatem trójmian przyjmuje tylko wartości dodatnie. Wynika stąd, że dla każdej liczby $m \in \mathbf{R}$ współczynnik kierunkowy prostej jest dodatni, czyli funkcja f jest rosnąca.

2. (4 pkt) Niech $A, B \subset \Omega$ będą zdarzeniami losowymi takimi, że $P(A) = \frac{3}{5}$ oraz $P(B') = \frac{4}{7}$. Wykaż, że $P(A \cap B) \neq 0$.

Rozwiązanie
Z danych zadania oraz z własności prawdopodobieństwa wynika, że $P(B) = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$. Stąd otrzymujemy $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \geqslant \frac{3}{5} + \frac{3}{7} - 1 = \frac{1}{35} > 0$, czyli $P(A \cap B) \neq 0$.

3. (4 pkt) Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej $a \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$ równanie $x^2 + y^2 - ax + 2y + a = 0$ jest równaniem okręgu.

Rozwiązanie
Sprowadzamy równanie okręgu do postaci $(x - \frac{a}{2})^2 + (y+1)^2 = \frac{a^2}{4} - a + 1$. Prawą stronę równania można zapisać w postaci $\frac{(a-2)^2}{4}$. Dla $a \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$ prawdziwa jest nierówność $\frac{(a-2)^2}{4} > 0$, więc równanie, o którym jest mowa w zadaniu, jest równaniem okręgu o środku w punkcie $(\frac{a}{2}, -1)$ i promieniu $\frac{|a-2|}{2}$.

4. (3 pkt) Suma i różnica dwóch liczb są równe odpowiednio $2\sqrt{n}$ oraz $2\sqrt{k}$, gdzie $n, k \in \mathbf{N}$. Wykaż, że iloczyn tych liczb jest liczbą całkowitą.

Rozwiązanie
Liczby, o których jest mowa w zadaniu oznaczmy x i y. Otrzymujemy układ równań $\begin{cases} x + y = 2\sqrt{n} \\ x - y = 2\sqrt{k} \end{cases}$.
Rozwiązaniem tego układu jest para liczb (x, y), gdzie $x = \sqrt{n} + \sqrt{k}$ oraz $y = \sqrt{n} - \sqrt{k}$.
Iloczyn $x \cdot y = (\sqrt{n} + \sqrt{k})(\sqrt{n} - \sqrt{k}) = n - k$ jest liczbą całkowitą.

5. (5 pkt) Romb obraca się dookoła każdej ze swoich przekątnych. Powstałe w ten sposób dwie bryły mają równe objętości. Wykaż, że ten romb jest kwadratem.

Rozwiązanie
Przekątne AC i BD rombu $ABCD$ są prostopadłe i dzielą się na połowy. Oznaczmy przez O punkt przecięcia tych przekątnych. W wyniku obrotu rombu dookoła przekątnej AC powstaje bryła złożona z dwóch przystających stożków. Objętość tej bryły jest równa $V_1 = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot |OD|^2 \cdot |AO|$. W wyniku obrotu rombu dookoła przekątnej BD także powstaje bryła złożona z dwóch przystających stożków. Objętość tej bryły jest równa $V_2 = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot |AO|^2 \cdot |OD|$. Porównując oba wzory, otrzymujemy równość $|OD|^2 \cdot |AO| = |AO|^2 \cdot |OD|$, a stąd $|AO| = |OD|$. Oznacza to, że przekątne rombu są równej długości, zatem romb jest kwadratem.